Ueber die Verallgemeinerung

eines

Poisson'schen Problems aus der analytischen Wärmetheorie.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei

hochlöblicher philosophischer Facultät zu Marburg

eingereicht

von

Hugo Fenkner

aus Goslar a. H.

Marburg.

Universitäts-Buchdruckerei (R. Friedrich).

1879.

Poisson untersuchte in seiner »Théorie mathématique de la chaleur chapitre X« die Vertheilung der Wärme in einer Kugel, die zusammengesetzt ist aus einem homogenen kugelförmigen Kern und einer diesen umgebenden Kugelschale. Diese Hülle wurde gleichfalls homogen, aber aus einer Materie bestehend angenommen, welche von der des Kernes verschieden ist. Die Temperatur wurde als Function von zwei Variabeln — von dem Radius und der Zeit — vorausgesetzt. Poisson sagt: »Nous supposerons toujours la température égale à chaque instant en tous les points également éloignés du centre de la sphère; de sorte qu'en appelant r le rayon mené de ce centre à un point quelconque, soit du noyau, soit de la couche extérieure, la température de ce point au bout du temps t sera une fonction de r et de t«.

Die Anfangstemperaturen für beide Theile der Kugel waren als Functionen des Radius gegeben. Die Kugel war nach Erwärmung in ein Mittel versetzt, an welches sie regelmässig eine Wärmemenge abgab proportional der Temperaturdifferenz.

Poisson verificiert seine Resultate durch Anwendung derselben auf specielle Fälle. Die gefundenen Formeln mussten sich unter bestimmten Vorausetzungen auf gewisse andere reducieren, welche schon Fourier hergeleitet und in seiner »Théorie analytique de la chaleur« veröffentlicht hatte.

In Folgendem soll nun zunächst das Poisson'sche Problem in einer etwas andern Weise kurz behandelt werden; wir wollen dann aber die Aufgabe zu erweitern suchen; von der beschränkenden Vorausetzung, es ändere sich die Temperatur im

Innern der Kugel nur von Schicht zu Schicht, wollen wir uns frei machen und annehmen, die Temperatur eines jeden Punktes sei eine Function von vier Variabeln – von den drei Coordinaten und der Zeit — also etwa

$$u = f(r, \Theta, \varphi; t)$$

Ueber die Bewegung der Wärme in einer aus zwei concentrischen Theilen bestehenden Kugel.

---

1. Die Temperatur sei eine Function von nur zwei Variablen — von dem Radius und der Zeit.

Die partiellen Differentialgleichungen, welche das physikalische Gesetz für die Wärmebewegung in beiden Theilen der Kugel aussprechen, sind folgende:

$$(1\alpha) \quad \ldots \quad \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$$

$$(1\beta) \quad \ldots \quad \frac{\partial v'}{\partial t} = a'^2 \cdot \frac{\partial^2 v'}{\partial r^2}$$

wo zur Abkürzung $\frac{k}{c\varrho} = a^2$ und $\frac{k'}{c'\varrho'} = a'^2$ gesetzt worden ist. In diesen Gleichungen soll bedeuten:

$v = ru$, wo u die Temperatur irgend eines Punktes im Innern des Kugelkerns;

$v' = ru'$, wo u' die Temperatur irgend eines Punktes im Innern der äussern Hülle;

t die Zeit;

r der Abstand irgend eines Punktes vom Kugelcentrum.

k, ϱ, c beziehungsweise die Leistungsfähigkeit, das specifische Gewicht und die specifische Wärme des Kernstoffs;

k', ϱ', c' die nämlichen Werthe bezüglich des Stoffes der Hülle.

Die Gleichung (1α) gilt für alle Werthe von r von o bis h (wenn h der Radius des Kerns); die Gleichung (1β) hingegen für sämmtliche Werthe dieser Variablen von h bis $h+h'$ (wenn h' die Dicke der Hülle).

Die Kugel werde nun nach ihrer Erwärmung in ein Mittel versetzt, an welches sie regelmässig eine Wärmemenge abgiebt proportional der Temperaturdifferenz. Die Temperatur des Mediums sei U; die äussere Leistungsfähigkeit des Kernstoffes sei H, die des Hüllstoffs H'.

Die Bedingungen in Betreff der Contact- beziehungsweise Oberfläche des Körpers gestalten sich dann, wenn der Einfachheit wegen $U=o$ gesetzt und $\frac{H}{k}$ mit b, $\frac{H}{k'}$ mit b', $\frac{H'}{k'}$ mit b'' bezeichnet werden, wie folgt:

$$(2) \ldots \frac{\partial v'}{\partial r}+\left(b''-\frac{1}{h+h'}\right)v'=o \text{ für } r=h+h'.$$

$$\left.\begin{aligned}(3\alpha) \ldots \frac{\partial v'}{\partial r}-\left(b'+\frac{1}{h}\right)v'+b'v=o\\ (3\beta) \ldots \frac{\partial v}{\partial r}+\left(b-\frac{1}{h}\right)v-bv'=o\end{aligned}\right\} \text{ für } r=h.$$

Damit v für $r=o$ nicht unbestimmt werde, fügen wir die Bedingung

$$(4) \ldots v=o \text{ für } r=o$$

hinzu.

Die Anfangstemperaturen für beide Theile der Kugel sollen als Functionen von r gegeben sein, nämlich:

$$\left.\begin{aligned}(5\alpha) \ldots v=ru=rF(r)\\ (5\beta) \ldots v'=ru'=rf(r)\end{aligned}\right\} \text{für } t=o,$$

Somit lautet unsere Aufgabe folgendermassen:

Die Functionen u und u' von r und t so zu bestimmen, dass u die partielle Differentialgleichung (1α), u' die partielle Differentialgleichung (1β) befriedige, und dass die Nebenbedingungen 2, 3, 4, 5 erfüllt werden.

Wir gehen aus von partikulären Lösungen der Gleichungen (1). In den Gleichungen

$$v = e^{-\lambda^2 t} . \sin \frac{\lambda r}{a}$$

$$v' = e^{-\lambda^2 t} . \sin \frac{\lambda r}{a'}$$

haben wir je eine particuläre Lösung der (1α) und (1β). Die Bedingung (4) wird erfüllt. Damit auch die Bedingung (2) befriedigt werde, müssen wir für $r = h + h'$

$$e^{-\lambda^2 t} . \left\{ \frac{\lambda}{a'} \cos \frac{\lambda r}{a'} + \left(b'' - \frac{1}{h+h'} \right) \sin \frac{\lambda r}{a'} \right\} = o \text{ d. h.}$$

$$(h+h')\lambda \cos \frac{\lambda(h+h')}{a'} + a' \left[b''(h+h') - 1 \right] \sin \frac{\lambda(h+h')}{a'} = o$$

setzen. Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ die Wurzel dieser transscendenten Gleichung*). Multipliciren wir dann ebenerwähnte particuläre Lösungen mit den vorläufig noch unbekannten Coëfficienten p_n und q_n, setzen der Reihe nach $n = 1, 2, 3, \ldots$ und summieren, so erhalten wir die allgemeinen Lösungen der Gleichungen (1) in der Form:

$$(6\alpha) \ldots . \quad v = \sum_{n=1}^{\infty} p_n . e^{-\lambda_n^2 t} . \sin \frac{\lambda_n r}{a}$$

$$(6\beta) \ldots . \quad v' = \sum_{n=1}^{\infty} q_n . e^{-\lambda_n^2 t} . \sin \frac{\lambda_n r}{a'}$$

Durch Substitution dieser Werthe für v und v' in die Gleichungen (3α) und (3β), welche für alle Werthe von t gelten müssen, folgt:

$$\left\{ h\lambda_n \cos \frac{\lambda_n h}{a'} - a'(b'h+1) \sin \frac{\lambda_n h}{a'} \right\} q_n + p_n a' b' h \sin \frac{\lambda_n h}{a} = o$$

$$\left\{ h\lambda_n \cos \frac{\lambda_n h}{a} + a(bh-1) \sin \frac{\lambda_n h}{a} \right\} p_n - q_n a b h \sin \frac{\lambda_n h}{a'} = o$$

Der letzteren von diesen beiden Gleichungen genügt man etwa durch:

---

*) Vgl. Riemann, partielle Differentialgleichungen §. 64 (p. 157 der 2. Aufl.).

$$p_n = abh \sin \frac{\lambda_n h}{a'} . s_n$$

$$q_n = h\lambda_n \cos \frac{\lambda_n h}{a} + a\,(bh-1) \sin \frac{\lambda_n h}{a} . s_n$$

Durch Substitution dieser Werthe für p_n und q_n in die erstere von jenen beiden Gleichungen ergibt sich die wichtige Relation:

$$\left\{h\lambda_n \cos \frac{\lambda_n h}{a'} - a'(b'h+1) \sin \frac{\lambda_n h}{a'}\right\}\left\{h\lambda_n \cos \frac{\lambda_n h}{a} + a(bh-1) \sin \frac{\lambda_n h}{a}\right\}$$

$$+ aa'bb'h^2 \sin \frac{\lambda_n h}{a} . \sin \frac{\lambda_n h}{a'} = o \ldots . \quad (7)$$

und ebenso durch Substitution in die Ausdrücke für v und v' d. h. in die Gleichungen (6):

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} abh \sin \frac{\lambda_n h}{a'} \sin \frac{\lambda_n r}{a} . s_n . e^{-\lambda_n^2 t}$$

$$v' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(h\lambda_n \cos \frac{\lambda_n h}{a} + a(bh-1) \sin \frac{\lambda_n h}{a}\right) \sin \frac{\lambda_n r}{a'} . s_n . e^{-\lambda_n^2 t}$$

Es werde nun gesetzt:

$$(7\alpha) \ldots . \quad abh \sin \frac{\lambda_n h}{a'} \sin \frac{\lambda_n r}{a} = R$$

$$(7\beta) \ldots . \left(h\lambda_n \cos \frac{\lambda_n h}{a} + a(bh-1) \sin \frac{\lambda_n h}{a}\right) \sin \frac{\lambda_n r}{a'} = R'$$

sodass durch Einführung dieser abkürzenden Bezeichnungsweise die Gesammtausdrücke für v und v' in

$$(8\alpha) \ldots . \quad v = ru = \sum_{n=1}^{\infty} R . s_n . e^{-\lambda_n^2 t}$$

$$(8\beta) \ldots . \quad v' = ru' = \sum_{n=1}^{\infty} R' . s_n . e^{-\lambda_n^2 t}$$

übergehen.

Diese Gleichungen (8) sind aber mit den Poisson'schen Gleichungen (e) in Bezug auf Form übereinstimmend. Nur die Bedeutung, die Werthe von R, R', s_n nicht. Der Coëfficient s_n, welcher sich bekanntlich aus den Anfangstemperaturzuständen

bestimmen lässt, wird, wie man leicht einsieht, dieselbe Form haben, wie die von Poisson mit M bezeichnete Grösse, nämlich die Form:

$$s_n = \frac{a'^2 b' \int_0^h R\, r\, F(r)\, dr + a^2 b \int_h^{h+h'} R'\, r\, f(r)\, dr}{a'^2 b' \int_0^h R^2\, dr \qquad + a^2 b \int_h^{h+h'} R'^2\, dr}$$

Substituieren wir diesen Werth von s_n in die Gleichungen (8), so erhalten wir als allgemeine Lösungen unseres Problems:

$$(9\alpha) \ldots u = \frac{v}{r} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a'^2 b' \int_0^h R\, r\, F(r)\, dr + a^2 b \int_h^{h+h'} R'\, r\, f(r)\, dr}{a'^2 b' \int_0^h R^2\, dr \qquad + a^2 b \int_h^{h+h'} R'^2\, dr} \cdot \frac{R}{r} e^{-\lambda_n^2 t}$$

$$(9\beta) \ldots u' = \frac{v'}{r} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a'^2 b' \int_0^h R\, r\, F(r)\, dr + a^2 b \int_h^{h+h'} R'\, r\, f(r)\, dr}{a'^2 b' \int_0^h R^2\, dr \qquad + a^2 b \int_h^{h+h'} R'^2\, dr} \cdot \frac{R'}{r} e^{-\lambda_n^2 t}$$

Wir bemerken, dass mit zunehmender Zeit u sowohl als auch u' immer kleiner und kleiner werden; wächst t über alle Grenzen hinaus, so wird $u = u' = o$ und die Kugel hat in allen ihren Puncten die constante Temperatur Null angenommen.

Wir wollen die Formeln (9) jetzt nicht verificieren, da wir auf dieselben im Verlauf unserer Betrachtungen zurückzukommen Gelegenheit haben werden, und dort eine Verification geeigneter erscheint.

Nachdem wir somit die erste Aufgabe erledigt, schreiten wir zu der Verallgemeinerung dieses Problems.

2. Die Temperatur sei eine Function von vier Variablen — von den drei Coordinaten und der Zeit.

Die partiellen Differentialgleichungen, welche das physikalische Gesetz für Wärmebewegung in den beiden Theilen der Kugel aussprechen, sind folgende*):

$$(1^0\alpha)\ldots \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a^2}{r^2}\left\{\frac{\partial\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{\partial\left(\sin\Theta\frac{\partial u}{\partial\Theta}\right)}{\sin\Theta\,\partial\Theta} + \frac{1}{\sin^2\Theta}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right\}$$

$$(1^0\beta)\ldots \frac{\partial u'}{\partial t} = \frac{a'^2}{r^2}\left\{\frac{\partial\left(r^2\frac{\partial u'}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{\partial\left(\sin\Theta\frac{\partial u'}{\partial\Theta}\right)}{\sin\Theta\,\partial\Theta} + \frac{1}{\sin^2\Theta}\cdot\frac{\partial^2 u'}{\partial\varphi^2}\right\}$$

Die Gleichung $(1^0\alpha)$ gilt für alle Werthe des Radiusvector von o bis h; die Gleichung $(1^0\beta)$ für sämmtliche Werthe dieser Variabeln von h bis $h + h'$.

Die Bedingungen in Betreff der Contactfläche beziehungsweise der Oberfläche des Körpers lauten:

$$(2^0)\ \ldots\ \frac{\partial u'}{\partial r} + b''u' = o \text{ für } r = h + h'$$

$$\left.\begin{aligned}(3^0\alpha)\ \ldots\ \frac{\partial u'}{\partial r} + b'(u - u') &= o\\ (3^0\beta)\ \ldots\ \frac{\partial u}{\partial r} + b(u - u') &= o\end{aligned}\right\} \text{ für } r = h$$

$$(4^0)\ \ldots\ u = o \text{ für } r = o$$

Die Anfangstemperaturen für beide Theile der Kugel sollen als Functionen von r, Θ, φ, gegeben sein, nämlich:

$$\left.\begin{aligned}(5^0\alpha)\ldots u &= F_0(r, \Theta, \varphi)\\ (5^0\beta)\ldots u' &= f_0(r, \Theta, \varphi)\end{aligned}\right\} \text{ für } t = o$$

Somit lautet unsere Aufgabe folgendermassen: Die Functionen u und u' von r, Θ, φ, t so zu bestimmen, dass u die partielle Differentialgleichung $(1^0\alpha)$, u' die partielle Differentialgleichung $(1^0\beta)$ befriedige und dass die Nebenbedingungen 2^0, 3^0, 4^0, 5^0 erfüllt werden.

---

*) Vergl. Riemann, Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen §. 72 (p. 180 der 2. Aufl.).

Wir gehen aus von particulären Lösungen der Gleichungen (1⁰). In den Gleichungen

$$u = e^{-\lambda_m^2 t} \cdot f\left(\frac{\lambda_m}{a}, r\right)$$

$$u' = e^{-\lambda_m^2 t} \cdot f\left(\frac{\lambda_m}{a'}, r\right)$$

wo zur Abkürzung die Reihe

$$r^m \cdot \left\{1 - \frac{\left(\frac{\lambda_m}{a}\right)^2 r^2}{2(2m+3)} + \frac{\left(\frac{\lambda_m}{a}\right)^4 r^4}{2 \cdot 4(2m+3)(2m+5)} - + \ldots\right\}$$

mit $f\left(\frac{\lambda_m}{a}, r\right)$ und die Reihe

$$r^m \cdot \left\{1 - \frac{\left(\frac{\lambda_m}{a'}\right)^2 r^2}{2(2m+3)} + \frac{\left(\frac{\lambda_m}{a'}\right)^4 r^4}{2 \cdot 4(2m+3)(2m+5)} - + \ldots\right\}$$

mit $f\left(\frac{\lambda_m}{a'}, r\right)$ bezeichnet worden ist, haben wir je eine particuläre Lösung der partiellen Differentialgleichungen (1⁰) und (1⁰β), welche zugleich die Nebenbedingung (4⁰) erfüllen*). Damit nun auch die Bedingung (2⁰) befriedigt werde, müssen wir für $r = h + h'$

$$e^{-\lambda_m^2 t} \cdot \left\{\frac{\partial f\left(\frac{\lambda_m}{a'}, r\right)}{\partial r} + b'' f\left(\frac{\lambda_m}{a'}, r\right)\right\} = 0 \text{ d. h.}$$

$$\left[\frac{\partial f\left(\frac{\lambda_m}{a'}, r\right)}{\partial r}\right]_{r=h+h'} + b'' f\left(\frac{\lambda_m}{a'}, h+h'\right) = 0$$

setzen. Es seien λ_{m_1}, λ_{m_2}, λ_{m_3} . . . $\lambda_{m,n}$ die Wurzeln dieser transscendenten Gleichung. Multipliciren wir nun ebenerwähnte particuläre Lösungen mit den vorläufig noch unbekannten Constanten $p_{m,n}$ und $q_{m,n}$; setzen sodann der Reihe nach $m = 0, 1, 2, \ldots$.

---

*) Vergl. Riemann, Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen Abschnitt IV. §. 73 (p. 185 der 2. Aufl.).

. . . $n = 1, 2, 3, \ldots$ und summieren, so erhalten wir die allgemeinen Lösungen der Gleichungen (1⁰) unter der Form:

$$(6^0\alpha) \ldots\ldots u = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \cdot e^{-\lambda_{mn}^2 t} \cdot f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a}, r\right)$$

$$(6^0\beta) \ldots\ldots u' = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \cdot e^{-\lambda_{mn}^2 t} \cdot f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a'}, r\right)$$

Die Coëfficienten p_{mn} und q_{mn} sind später so zu bestimmen, dass den Bedingungen für die Anfangstemperaturzustände der beiden Kugeltheile Genüge geleistet wird.

Durch Substitution dieser Werthe für u und u' in die Gleichungen $(3^0\alpha)$ und $(3^0\beta)$ resultieren unter der Berücksichtigung, dass letztere nur für den speciellen Werth $r = h$ gelten, folgende Beziehungen:

$$\left[\frac{\partial \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \cdot e^{-\lambda_{mn}^2 t} \cdot f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a'}, r\right)}{\partial r}\right]_{r=h} +$$

$$+ b'\left[\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \cdot e^{-\lambda_{mn}^2 t} \cdot f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a}, h\right) - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \cdot e^{-\lambda_{mn}^2 t} \cdot f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a'}, h\right)\right] = 0$$

und ebenso:

$$\left[\frac{\partial \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \cdot e^{-\lambda_{mn}^2 t} \cdot f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a}, r\right)}{\partial r}\right]_{r=h} +$$

$$+ b\left[\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \cdot e^{-\lambda_{mn}^2 t} \cdot f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a}, h\right) - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \cdot e^{-\lambda_{mn}^2 t} \cdot f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a'}, h\right)\right] = 0$$

Da aber die Gleichungen $(3^0\alpha)$ und $(3^0\beta)$ für jeden Werth der Veränderlichen t bestehen müssen, so ist es auch erlaubt, die Summe der Coëfficienten jeder Exponentialgrösse allein gleich Null zu setzen, woraus wir die nachstehenden Gleichungen erhalten:

$$\left\{\left[\frac{\partial . f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a'}, r\right)}{\partial r}\right]_{r=h} - b' f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a'}, h\right)\right\} q_{mn} + b' f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a}, h\right) p_{mn} = o$$

$$\left\{\left[\frac{\partial . f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a}, r\right)}{\partial r}\right]_{r=h} + b f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a}, h\right)\right\} p_{mn} - b f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a'}, h\right) q_{mn} = o$$

Der letzteren von diesen beiden Gleichungen genügt man etwa durch die Werthe:

$$p_{mn} = b f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a'}, h\right) s_{mn}$$

$$q_{mn} = \left\{\left[\frac{\partial . f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a}, r\right)}{\partial r}\right]_{r=h} + b f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a}, h\right)\right\} s_{mn}$$

in welchen Ausdücken s_{mn} eine noch näher zu bestimmende Grösse bezeichnet.

Durch Substitution dieser beiden für p_{mn} und q_{mn} angenommenen Werthe in die erstere von jenen Gleichungen, ergiebt sich folgende wichtige Relation:

$$\left\{\left[\frac{\partial . f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a'}, r\right)}{\partial r}\right]_{r=h} - b' f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a'}, h\right)\right\}\left\{\left[\frac{\partial . f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a}, r\right)}{\partial r}\right]_{r=h} + b f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a}, h\right)\right\}$$

$$+ bb' f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a}, h\right) f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a'}, h\right) = o \quad \ldots\ldots \quad (7^0)$$

und durch Substitution eben jener Werthe von p_{mn} und q_{mn} in die Ausdrücke für u und u' d. h. in die Gleichungen $(6^0\alpha)$ und $(6^0\beta)$ resultiert ferner:

$$u = \sum_{m=o}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b\left(\frac{\lambda_{mn}}{a'}, h\right) f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a}, r\right) s_{mn} . e^{-\lambda_{mn}^2 t}$$

$$u' = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{\partial . f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a}, r\right)}{\partial r} \right]_{r=h} + b f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a}, h\right) \right\} f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a'}, r\right) s_{mn} . e^{-\lambda_{mn}^2 t} .$$

Es werde nun gesetzt:

$$(7^0\alpha) \ldots\ldots b f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a'}, h\right) f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a}, r\right) = R_0$$

$$(7^0\beta) \ldots\ldots \left\{ \left[\frac{\partial . f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a}, r\right)}{\partial r} \right]_{r=h} + b f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a}, h\right) \right\} f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a'}, r\right) = R'_0$$

sodass durch Einführung dieser abkürzenden Bezeichnungsweise die Gesammtausdrücke für u und u' in folgende übergehen:

$$(8^0\alpha) \ldots\ldots u = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} R_0 . s_{mn} . e^{-\lambda_{mn}^2 t}$$

$$(8^0\beta) \ldots\ldots u' = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} R'_0 . s_{mn} . e^{-\lambda_{mn}^2 t}$$

Die Werthe R_0 und R_0' genügen aber den Gleichungen:

$$(9^0\alpha) \ldots\ldots \partial \frac{\left(r^2 \frac{\partial R_0}{\partial r}\right)}{\partial r} - m(m+1) R_0 + \frac{\lambda_{mn}^2}{a^2} r^2 R_0 = o$$

$$(9^0\beta) \ldots\ldots \partial \frac{\left(r^2 \frac{\partial R'_0}{\partial r}\right)}{\partial r} - m(m+1) R'_0 + \frac{\lambda_{mn}^2}{a'^2} r^2 R'_0 = o$$

ausserdem aber den Bedingungen

$$(10^0) \ldots\ldots \frac{\partial R'_0}{\partial r} + b'' R'_0 = o \text{ für } r = h + h'$$

$$\left.\begin{aligned} (11^0\alpha) \ldots\ldots \frac{\partial R'_0}{\partial r} + b'(R_0 - R'_0) = o \\ (11\beta^0) \ldots\ldots \frac{\partial R_0}{\partial r} + b(R_0 - R'_0) = o \end{aligned}\right\} r = h$$

Der Ausdruck für R_0 genügt ferner der Bedingung
$(12^0) \ldots\ldots R_0 = o$ für $r = o$.

Die Werthe u und u' befriedigen nun, wie man aus Riemann's Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen §. 72 ersieht, beziehungsweise die Gleichungen

$$(13^0\alpha) \ldots \ldots \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a^2}{r^2} \left\{ \frac{\partial \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right)}{\partial r} - m(m+1)u \right\}$$

$$(13^0\beta) \ldots \ldots \frac{\partial u'}{\partial t} = \frac{a'^2}{r^2} \left\{ \frac{\partial \left(r^2 \frac{\partial u'}{\partial r} \right)}{\partial r} - m(m+1)u' \right\}$$

Multiplicieren wir nun die Gleichung $(13^0\alpha)$ mit $r^2 R_0 \partial r$, die Gleichung $(13^0\beta)$ mit $r^2 R'_0 \partial r$ und integrieren beide innerhalb des gesammten Gültigkeitsintervalles, d. h. die erstere von $r = o$ bis $r = h$, die letztere dagegen zwischen den Grenzen $r = h$ und $r = h + h'$, so resultiert:

$$(14^0\alpha) \ldots \frac{1}{a^2} \partial \frac{\int_o^h r^2 R_0 u \, \partial r}{\partial t} = \int_o^h \frac{\partial \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right)}{\partial r} R_0 \partial r - m(m+1) \int_o^h R_0 u \, \partial r$$

$$(14^0\beta) \ldots \frac{1}{a'^2} \partial \frac{\int_h^{h+h'} r^2 R'_0 u' \, \partial r}{\partial t} = \int_h^{h+h'} \frac{\partial \left(r^2 \frac{\partial u'}{\partial r} \right)}{\partial r} R'_0 \partial r - m(m+1) \int_h^{h+h'} R'_0 u' \partial r$$

Das erste auf der rechten Seite der Gleichung $(14^0\alpha)$ vorkommende Integral lässt sich durch partielle Integration umgestalten. Es ist nämlich:

$$\int_o^h \frac{\partial \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right)}{\partial r} R_0 \partial r = \left[R_0 . r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right]_{r=h} - \left[R_0 . r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right]_{r=o} - \int_o^h \frac{\partial u}{\partial r} . r^2 \frac{\partial R_0}{\partial r} \partial r$$

und da

$$\int_o^h \frac{\partial u}{\partial r} . r^2 \frac{\partial R_0}{\partial r} \partial r = \left[r^2 \frac{\partial R_0}{\partial r} u \right]_{r=h} - \left[r^2 \frac{\partial R_0}{\partial r} u \right]_{r=o} - \int_o^h u \frac{\partial \left(r^2 \frac{\partial R_0}{\partial r} \right)}{\partial r} \partial r$$

ist, so folgt unmittelbar

$$\int_o^h \frac{\partial\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)}{\partial r} R_0\,\partial r = \left[r^2\left(R_0\frac{\partial u}{\partial r} - u\frac{\partial R_0}{\partial r}\right)\right]_{r=h}$$

$$-\left[r^2\left(R_0\frac{\partial u}{\partial r} - u\frac{\partial R_0}{\partial r}\right)\right]_{r=o} + \int_o^h u\,\frac{\partial\left(r^2\frac{\partial R_0}{\partial r}\right)}{\partial r}\,\partial r$$

und hierin verschwindet das zweite vom Integralzeichen freie Glied, da gemäss der Gleichung (4°) $u = o$ für $r = o$ und gemäss Gleichung (12°) $R_0 = o$ für $r = o$ wird.

Demnach geht die Gleichung (14°α) über in:

$$\frac{1}{a^2}\partial.\frac{\int_o^h r^2 R_0\, u\,\partial r}{\partial t} = \left[r^2\left(R_0\frac{\partial u}{\partial r} - u\frac{\partial R_0}{\partial r}\right)\right]_{r=h}$$

$$+\int_o^h \left[\frac{\partial\left(r^2\frac{\partial R_0}{\partial r}\right)}{\partial r} - m(m+1)R_0\right] u\,\partial r$$

Berücksichtigen wir jedoch die Gleichung (9°α), so gestaltet sich die soeben hergeleitete, wie folgt:

$$(15°\alpha)\ \ldots\ \frac{1}{a^2}\partial.\frac{\int_o^h r^2 R_0\, u\,\partial r}{\partial t} = \left[\left(R_0\frac{\partial u}{\partial r} - u\frac{\partial R_0}{\partial r}\right) r^2\right]_{r=h} - \frac{\lambda^2_{mn}}{a^2}\int_o^h r^2 R_0\, u\, dr$$

Das nämliche Verfahren wenden wir jetzt auf das erste auf der rechten Seite der Gleichung (14°β) stehende Integral an. Durch partielle Integration folgt:

$$\int_h^{h+h'} \frac{\partial\left(r^2\frac{\partial u'}{\partial r}\right)}{\partial r} R'_0\,\partial r = \left[R'_0 . r^2\frac{\partial u'}{\partial r}\right]_{r=h+h'} - \left[R'_0 . r^2\frac{\partial u'}{\partial r}\right]_{r=h} - \int_h^{h+h'} \frac{\partial u'}{\partial r} . r^2\,\frac{\partial R'_0}{\partial r}\,\partial r$$

und da

$$\int_h^{h+h'} \frac{\partial u'}{\partial r} \cdot r^2 \frac{\partial R'_0}{\partial r} \partial r = \left[r^2 \frac{\partial R'_0}{\partial r} u' \right]_{r=h+h'} - \left[r^2 \frac{\partial R'_0}{\partial r} u' \right]_{r=h} - \int_h^{h+h'} u' \frac{\partial \left(r^2 \frac{\partial R'_0}{\partial r} \right)}{\partial r}$$

ist, so folgt unmittelbar

$$\int_h^{h+h'} \frac{\partial \left(r^2 \frac{\partial u'}{\partial r} \right)}{\partial r} R'_0 \, dr = \left[r^2 \left(R'_0 \frac{\partial u'}{\partial r} - u' \frac{\partial R'_0}{\partial r} \right) \right]_{r=h+h'}$$

$$- \left[r^2 \left(R'_0 \frac{\partial u'}{\partial r} - u' \frac{\partial R'_0}{\partial r} \right) \right]_{r=h} + \int_h^{h+h'} u' \frac{\partial \left(r^2 \frac{\partial R'_0}{\partial r} \right)}{\partial r} \partial r$$

Das erste vom Integralzeichen freie Glied wird aber verschwinden. Denn multiplicieren wir die Gleichung (2°), welche für den Werth $r = h + h'$ besteht, mit R'_0, die Gleichung (10°), welche ebenfalls für den speciellen Werth $r = h + h'$ gilt, mit u', so ergiebt sich durch Subtraction sofort:

$$R'_0 \frac{\partial u'}{\partial r} - u' \frac{\partial R'_0}{\partial r} = 0$$

Daher geht die Gleichung (14°β) über in:

$$\frac{1}{a'^2} \partial \cdot \frac{\int_h^{h+h'} r^2 R'_0 \, u \, \partial r}{\partial t} = - \left[\left(R'_0 \frac{\partial u'}{\partial r} - u' \frac{\partial R'_0}{\partial r} \right) r^2 \right]_{r=h}$$

$$+ \int_h^{h+h'} \left[\frac{\partial \left(r^2 \frac{\partial R'_0}{\partial r} \right)}{\partial r} - m(m+1) R'_0 \right] u' \, \partial r.$$

Berücksichtigen wir jedoch die Gleichung (9°β), so erhalten wir

$$(15°\beta) \ldots \frac{1}{a'^2} \partial \cdot \frac{\int_h^{h+h'} r^2 R'_0 u' \partial r}{\partial t} = - \left[\left(R'_0 \frac{\partial u'}{\partial r} - u' \frac{\partial R'_0}{\partial r} \right) r^2 \right]_{r=h} - \frac{\lambda^2_{mn}}{a'^2} \int_h^{h+h'} r^2 R'_0 u' \partial r$$

Durch Multiplication der Gleichungen ($3^{0}\alpha$) und ($11^{0}\alpha$) beziehungsweise mit R'_0 und u' ergiebt sich aber:

$$R'_0 \cdot \frac{\partial u'}{\partial r} = -b' R'_0 (u - u')$$

$$u' \cdot \frac{\partial R'_0}{\partial r} = -b' u' (R_0 - R'_0)$$

und durch Subtraction:

$$R'_0 \cdot \frac{\partial u'}{\partial r} - u' \frac{\partial R'_0}{\partial r} = b' (R_0 u' - u R'_0).$$

Ebenso folgt durch Multiplication der Gleichungen ($3^{0}\beta$) und ($11^{0}\beta$) beziehungweise mit R_0 und u:

$$R_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = -b R_0 (u - u')$$

$$u \cdot \frac{\partial R_0}{\partial r} = -b u (R_0 - R'_0)$$

und durch Subtraction:

$$R_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - u \frac{\partial R_0}{\partial u} = b (R_0 u' - u R_0')$$

Substituieren wir diese Werthe von $R'_0 \frac{\partial u'}{\partial r} - u' \frac{\partial R'_0}{\partial r}$ und $R_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - u \frac{\partial R_0}{\partial r}$ bezüglich in die Gleichungen ($15^{0}\beta$) und ($15^{0}\alpha$), so gestalten sich dieselben folgendermassen:

$$\frac{\partial \cdot \frac{1}{a^2 b} \int_0^h r^2 R_0 u \, \partial r}{\partial t} = \Big[R_0 u' - u R'_0 \Big]_{r=h} - \frac{\lambda^2_{mn}}{a^2 b} \int_0^h r^2 R_0 u \, \partial r$$

$$\frac{\partial \cdot \frac{1}{a'^2 b'} \int_h^{h+h'} r^2 R'_0 u' \partial r}{\partial t} = -\Big[R_0 u' - u R'_0 \Big]_{r=h} - \frac{\lambda^2_{mn}}{a'^2 b'} \int_h^{h+h'} r^2 R'_0 u' \partial r$$

und wenn wir diese Gleichungen addieren, so erhalten wir die wichtige Beziehung:

$$\frac{\partial \cdot \frac{1}{a^2 b}\int_0^h r^2 R_0 u\,\partial r + \frac{1}{a'^2 b'}\int_h^{h+h'} r^2 R'_0 u'\,\partial r}{\partial t} =$$

$$-\lambda_{mn}^2\left(\frac{1}{a^2 b}\int_0^h r^2 R_0 u\,\partial r + \frac{1}{a'^2 b'}\int_h^{h+h'} r^2 R'_0 u'\,\partial r\right)$$

Die Integration dieser Differentialgleichung ergiebt:

$$(16^a) \ldots\ \frac{1}{a^2 b}\int_0^h r^2 R_0 u\,\partial r + \int_h^{h+h'} r^2 R'_0 u'\,\partial r = C \cdot e^{-\lambda_{mn}^2 t}$$

wo C eine noch näher zu bestimmende Constante bezeichnet. Ihr wirklicher Werth ergiebt sich aus den Bedingungen (5^a) für die Anfangstemperaturzustände der Kugeltheile. Zur Zeit $t = o$ soll die Temperatur für jeden Punkt im Innern der Kugel als Function seiner Coordinaten gegeben sein und zwar lauteten die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} u &= F_0\,(r, \Theta, \varphi) \\ u' &= f_0\,(r, \Theta, \varphi) \end{aligned}\right\} \text{ für } t = o$$

Eine jede Funktion $G\,(\Theta, \varphi)$, welche für jeden Werth von Θ zwischen o und π und jeden Werth von φ zwischen o und 2π willkürlich gegeben ist, lässt sich, wie Dirichlet in Crelle's Journal Bd. 17 vollständig bewiesen, in die stets convergente Reihe

$$G\,(\Theta, \varphi) = \sum_{m=o}^{\infty} \frac{2m+1}{4\pi}\int_0^{\pi} \sin\Theta_1\, d\,\Theta_1 \int_0^{2\pi} P_m\, G\,(\Theta_1, \varphi_1)\; d\,\varphi_1$$

entwickeln, und zwar ist diese Entwicklung nur auf eine einzige Weise möglich.

Setzen wir demnach zur Abkürzung

$$\frac{2m+1}{4\pi}\int_0^{\pi} \sin\Theta_1\, d\,\Theta_1 \int_0^{2\pi} P_m F_0\,(r, \Theta_1, \varphi_1)\, d\,\varphi_1 = \Psi_m$$

und

$$\frac{2m+1}{4\pi}\int_0^{\pi} \sin\Theta_1\, d\Theta_1 \int_0^{2\pi} P_m f_0(r,\Theta_1,\varphi_1)\, d\varphi_1 = \Psi'_m$$

so präcisieren sich die Nebenbedingungen für die Anfangstemperaturzustände folgendermassen:

In der Gleichung (16°) muss für $t = o$ übergehen

$$u \text{ in } \Psi_m$$
$$u' \text{ in } \Psi'_m$$

Somit erhalten wir für die Constante C den Werth:

$$C = \frac{1}{a^2 b}\int_0^{h} r^2 R_0 \Psi_m \partial r + \frac{1}{a'^2 b'}\int_h^{h+h'} r^2 R'_0 \Psi'_m \partial r$$

und durch Substitution dieses Werthes von C in die Gleichung (16°) gestaltet sich dieselbe:

$$(17^0) \ldots \frac{1}{a^2 b}\int_0^{h} r^2 R_0 u \partial r + \frac{1}{a'^2 b'}\int_h^{h+h'} r^2 R'_0 u' \partial r =$$

$$\left(\frac{1}{a^2 b}\int_0^{h} r^2 R_0 \Psi_m \partial r + \frac{1}{a'^2 b'}\int_h^{h+h'} r^2 R'_0 \Psi'_m \partial r\right) e^{-\lambda_{mn}^2 t}$$

Mittels dieser Gleichung bestimmt sich der Werth von s_{mn} leicht. Setzt man nämlich in dieselbe anstatt u und u' ihre Reihenentwicklungen aus (8°α) und (8°β) ein, so geht die linke Seite der Gleichung (17°) in eine Doppel-Exponentialreihe bezüglich der Variabeln t über. Da indessen die rechte Seite nur ein einziges mit t behaftetes Glied enthält und die Gleichung doch identisch erfüllt sein soll, so müssen auf der rechten Seite sämmtliche Coëfficienten verschwinden, welche einem anderen Gliede, als dem mit dem Factor $e^{-\lambda_{mn}^2 t}$ behafteten, angehören. Demnach ist, wenn μ und ν von m beziehungsweise n verschieden und wenn R'_1 und R'_1 diejenigen Werthe bezeichnen,

welche aus R_0 resp. R'^0 entstehen, indem in diesen m mit μ, n mit ν vertauscht wird, folgende Geichung identisch erfüllt:

$$\frac{1}{a^2 b}\int_0^h r^2 R_0 R_1 \partial r + \frac{1}{a'^2 b'}\int_h^{h+h'} r^2 R'_0 R'_1 \partial r = 0$$

Für die specielle Annahme $\mu = m$, $\nu = n$ folgt:

$$\left(\frac{1}{a^2 b}\int_0^h r^2 R_0^2 \partial r + \frac{1}{a'^2 b'}\int_h^{h+h'} r^2 R'^2_0 \partial r\right) s_{mn} =$$

$$\frac{1}{a^2 b}\int_0^h r^2 R_0 \Psi_m \partial r + \frac{1}{a'^2 b'}\int_h^{h+h'} r^2 R'_0 \Psi_m \partial r$$

und hieraus erhalten wir:

$$s_{mn} = \frac{a'^2 b'\int_0^h r^2 R_0 \Psi_m \partial r + a^2 b\int_h^{h+h'} r^2 R'_0 \Psi'_m \partial r}{a'^2 b'\int_0^h r^2 R_0^2 \partial r \quad + a^2 b\int_h^{h+h'} r^2 R'^2_0 \partial r}$$

Substituiren wir diesen Werth von s_{mn} in die Gleichungen $(8^0\alpha)$ und $(8^0\beta)$, so gestalten sich die allgemeinen Lösungen unseres Problems folgendermassen:

$$(18^0\alpha) \ldots u = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a'^2 b'\int_0^h r^2 R_0 \Psi_m \partial r + a^2 b\int_h^{h+h'} r^2 R'_0 \Psi'_m \partial r}{a'^2 b'\int_0^h r^2 R_0^2 \partial r \quad + a^2 b\int_h^{h+h'} r^2 R'^2_0 \partial r} \cdot R_0 e^{-\lambda_{mn}^2 t}$$

$$(18^0\beta) \ldots u' = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a'^2 b'\int_0^h r^2 R_0 \Psi_m \partial r + a^2 b\int_h^{h+h'} r^2 R'_0 \Psi'_m \partial r}{a'^2 b'\int_0^h r^2 R_0^2 \partial r \quad + a^2 b\int_h^{h+h'} r^2 R'^2_0 \partial r} \cdot R'_0 e^{-\lambda_{mn}^2 t}$$

Diese Formeln repräsentieren also das Gesetz der Wärmevertheilung im Innern der Kugel bezogen auf irgend welche Zeit.

Die Doppelreihen convergieren sehr rasch, indem die Exponentialgrösse $e^{-\lambda_{mn}^2 t}$ mit zunehmendem λ_{mn} rasch abnimmt.

Was die Temperaturen anbetrifft, so machen wir die Bemerkung, dass dieselben mit wachsendem t immer geringer werden und sich schliesslich der Null immer mehr und mehr nähern. Wenn t über alle Grenzen hinaus wächst, so entnehmen wir aus den Formeln, dass dann die Temperatur sowohl in dem einen, wie in dem anderen Theile der Kugel einen und denselben Werth annimmt, nämlich den constanten Werth Null.

Wir schreiten jetzt zur Verification der Gleichungen (18°). Wir wollen dieselben auf einige specielle Fälle anwenden; bei bestimmten Annahmen müssen sie sich auf gewisse Formeln reducieren, welche bekannt sind, und auf welche wir verweisen können. So enthalten die unter (18°) verzeichneten Formeln die in der ersten Aufgabe erwähnten Gleichungen (9) als specielle Fälle, was zunächst nachgewiesen werden soll.

Besonderer Fall, wo sämmtliche Punkte auf ein und derselben concentrischen Kugelschicht gleiche Temperatur haben.

Bei dieser speciellen Annahme sind die Functionen $F_0(r, \Theta, \varphi)$ und $f_0(r, \Theta, \varphi)$ von Θ und φ unabhängig; wir wollen sie mit $F(r)$ und $f(r)$ bezeichnen. Demnach werden

$$\Psi_m = \frac{2m+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \sin\Theta_1 \, d\Theta_1 \int_0^{2\pi} P_m F_0(r, \Theta_1, \varphi_1) \, d\varphi_1 =$$

$$= F(r) \cdot \frac{2m+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \sin\Theta_1 \, d\Theta_1 \int_0^{2\pi} P_m \, d\varphi_1$$

$$\Psi'_m = \frac{2m+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \sin\Theta_1 \, d\Theta_1 \int_0^{2\pi} P_m f_0(r, \Theta_1, \varphi_1) \, d\varphi_1 =$$

$$= f(r) \cdot \frac{2m+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \sin\Theta_1 \, d\Theta_1 \int_0^{2\pi} P_m d\varphi_1.$$

Nun ist aber für jedes von Null verschiedene m*)

$$\int_0^{\pi} \sin \Theta_1 \, d\Theta_1 \int_0^{2\pi} P_m \, d\varphi_1 = 0;$$

folglich verschwinden in den Ausdrücken für u und u' alle diejenigen Glieder, welche einem Werthe von $m \gtrless 0$ entsprechen, und können wir uns daher auf den Werth $m = 0$ beschränken. Für $m = 0$ erhalten wir:

$$\int_0^{\pi} \sin \Theta_1 \, d\Theta_1 \int_0^{2\pi} \overset{P_0 = 1}{P_0} \, d\varphi_1 = 4\pi$$

woraus folgt:

$$\Psi_0 = F(r) \text{ und } \Psi'_0 = f(r).$$

Ferner:

$$R_0 = b\, f\left(\frac{\lambda_n}{a'}, h\right) f\left(\frac{\lambda_n}{a}, r\right)$$

$$R'_0 = \left\{\left[\frac{\partial . f\left(\frac{\lambda_n}{a}, r\right)}{\partial r}\right]_{r=h} + b\, f\left(\frac{\lambda_n}{a}, h\right)\right\} f\left(\frac{\lambda_n}{a'}, r\right)$$

Die Function $f\left(\frac{\lambda}{a}, r\right)$ bedeutet jetzt die Reihe

$$1 - \frac{\left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 r^2}{1.\,2.\,3} + \frac{\left(\frac{\lambda}{a}\right)^4 r^4}{1.\,2.\,3.\,4.\,5} - + \ldots\ldots$$

d. h. wir erhalten die wichtige Relation:

$$f\left(\frac{\lambda}{a}, r\right) = \frac{a}{\lambda} \cdot \frac{1}{r} \sin \frac{\lambda r}{a}$$

Hieraus folgt unmittelbar

*) Vgl. Poisson im Journal de l' Ecole polytéchnique cahier 19. p. 329 und ebenfalls

Duhamel im Journal de l' Ecole polytéchnique cahier 22. p. 52.

$$R_0 = b \cdot \frac{a'}{\lambda_n} \cdot \frac{1}{h} \sin \frac{\lambda_n h}{a'} \cdot \frac{a}{\lambda_n} \cdot \frac{1}{r} \cdot \sin \frac{\lambda_n r}{a} = \frac{aa'b}{\lambda_n^2 hr} \sin \frac{\lambda_n h}{a'} \sin \frac{\lambda_n r}{a}$$

$$= \frac{a'}{h^2 \lambda_n^2 r} \cdot R$$

und ebenso:

$$R'_0 = \left\{ \frac{a}{\lambda_n} \left[\frac{\partial \frac{1}{r} \sin \frac{\lambda_n r}{a}}{\partial r} \right]_{r=h} + b \cdot \frac{a}{\lambda_n} \cdot \frac{1}{h} \sin \frac{\lambda_n h}{a} \right\} \frac{a'}{\lambda_n} \cdot \frac{1}{r} \sin \frac{\lambda_n r}{a'} =$$

$$= \frac{a'}{h^2 \lambda_n^2 r} \left\{ h \lambda_n \cos \frac{h \lambda_n}{a} + a(bh - 1) \sin \frac{\lambda_n h}{a} \right\} \sin \frac{\lambda_n r}{a'} = \frac{a'}{h^2 \lambda_n^2 r} R'.$$

Somit haben wir die Beziehungen, welche zwischen den Ausdrücken R_0, R'_0 einerseits und den durch die Gleichungen (7α) und (7β) gegebenen R und R' andererseits bestehen, hergeleitet.

Die $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ sind jetzt die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{a'}{\lambda} \left[\frac{\partial \left(\frac{1}{r} \sin \frac{\lambda r}{a'} \right)}{\partial r} \right]_{r=h+h'} + b'' \frac{a'}{\lambda} \cdot \frac{1}{h+h'} \cdot \sin \frac{\lambda(h+h')}{a'} = 0 \text{ d. h.}$$

$$(h+h') \lambda \cos \frac{\lambda(h+h')}{a'} + a' \left[b''(h+h') - 1 \right] \sin \frac{\lambda(h+h')}{a'} = 0.$$

Substituieren wir nun die gefundenen Werthe für R_0, R'_0, Ψ_0 und Ψ'_0 in die Gleichungen (18°), so gestalten sich dieselben wie folgt:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a'^2 b' \int_0^h R\, r\, F(r)\, dr + a^2 b \int_h^{h+h'} R'\, r f(r)\, dr}{a'^2 b' \int_0^h R^2\, dr + a^2 b \int_h^{h+h'} R'^2\, dr} \cdot \frac{R}{r} \cdot e^{-\lambda_n^2 t}$$

$$u' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a'^2 b' \int_0^h R\, r\, F(r)\, dr + a^2 b \int_h^{h+h'} R'\, r\, f(r)\, dr}{a'^2 b' \int_0^h R^2\, dr + a^2 b \int_h^{h+h'} R'^2\, dr} \cdot \frac{R'}{r} \cdot e^{-\lambda_n^2 t}$$

und somit sind wir wieder auf die Gleichungen (9) der ersten Aufgabe zurückgekommen, wie vorauszusehen war.

Legen wir uns jetzt einmal die Frage vor, wie die Formeln (19°) sich modificieren bei der Annahme $h = o$. Wenn der Radius des innern Kerns immer kleiner und kleiner wird, der Kern selbst also schliesslich in einen Punkt zusammenschrumpft, so müssen sich die genannten Formeln natürlicherweise derart umgestalten, dass sie nunmehr das Gesetz für die Vertheilung der Wärme in einer homogenen Kugel vom Radius h' repräsentieren.

In der That, setzen wir $h = o$, so folgt:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^{h'} R'\, r\, f(r)\, dr}{\int_0^{h'} R'^2\, dr} \cdot \frac{R}{r} \cdot e^{-\lambda_n^2 t}$$

$$u' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^{h'} R'\, r\, f(r)\, dr}{\int_0^{h'} R'^2\, dr} \cdot \frac{R'^2}{r} \cdot e^{-\lambda_n^2 t}$$

Nun ist aber gemäss der Bedeutung von R und R'

$$R = o \text{ für } h = o;$$

Der Werth von u ist also Null. In dem Ausdruck für u' können wir im Zähler und Nenner den constanten Factor (aus Gl. 7β):

$$\left[h\lambda_n \cos\frac{\lambda_n h}{a} + a(bh-1)\sin\frac{\lambda_n h}{a}\right]^2$$

aufheben, so dass sich folgendes Resultat ergiebt:

$$u' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^{h'} r \sin\frac{\lambda_n r}{a'} f(r)\,dr}{\frac{h'}{2} - \frac{a'}{4\lambda_n}\sin\frac{2\lambda_n h'}{a'}} \cdot \frac{\sin\frac{\lambda_n r}{a'}}{r} \cdot e^{-\lambda_n^2 t}$$

Setzen wir jetzt für einen Augenblick noch: $\lambda_n = \alpha' \mu_n$, so geht diese Formel über in die folgende:

$$(20^0) \ldots\ \frac{ru'}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\mu_n r \int_0^{h'} r \sin\mu_n r f(r)\,dr}{h' - \frac{1}{2\mu_n}\sin 2\mu_n h'} \cdot e^{-\alpha'^2 \mu_n^2 t}$$

eine Gleichung, welche, abgesehen von der Bezeichnungsweise, ganz genau mit der in Fourier's »Théorie analytique de la chaleur« auf Seite 350 verzeichneten Gleichung übereinstimmt.

Wir wollen die Formel (20°) noch etwas umformen. Schreiben wir einmal c' für h', λ_n für μ_n und dann*)

$$\frac{1}{c' - \frac{1}{2\lambda_n}\sin 2\lambda_n c'} = \frac{1}{c'} \cdot \frac{\lambda_n^2 c'^2 + (hc'-1)^2}{\lambda_n^2 c'^2 + hc'(hc'-1)},$$

so geht die (20°) über in:

$$u' = \frac{2}{c'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 c'^2 + (hc'-1)^2}{\lambda_n^2 c'^2 + hc'(hc'-1)} \frac{e^{-a'^2 \lambda_n^2 t} \sin\lambda_n r}{r} \cdot \int_0^{c'} r f(r) \sin\lambda_n r\,dr$$

welche Gleichung wir in Riemann's Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen Abschnitt IV. auf Seite 163 entwickelt finden.

---

*) Vergl. Riemann, Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen §. 68.

Kehren wir zu den Formeln (18°) zurück.

Besonderer Fall, wo die Materie des Kerns derjenigen der äusseren Hülle gleich wird.

Bei dieser speciellen Annahme ist:

$$k' = k,\ c' = c,\ \varrho' = \varrho;\ \text{also}\ \alpha'^2 = \frac{k'}{c'\varrho'} = \frac{k}{c \cdot \varrho} = a^2 \text{ und}$$

$$b' = \frac{H}{k'} = \frac{H}{k} = b.$$

Die Gleichung (7°) verwandelt sich dann in folgende:

$$\left\{\left[\frac{\partial . f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a}, r\right)}{\partial r}\right]_{r=h} - b f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a'}, h\right)\right\}\left\{\left[\frac{\partial . f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a}, r\right)}{\partial r}\right]_{r=h} + b f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a}, h\right)\right\}$$

$$+ b^2 f^2\left(\frac{\lambda_{mn}}{a}, h\right) = o \text{ oder in:}$$

$$\left\{\left[\frac{\partial . f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a}, r\right)}{\partial r}\right]_{r=h}\right\}^2 = o \text{ d. h. } \frac{\partial . f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a}, r\right)}{\partial r} = o .$$

Wenn aber $a = a'$ und $\left[\frac{\partial f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a}, r\right)}{\partial r}\right]_{r=h} = o$ ist, so folgt aus den Gleichungen (7°α) und (7°β) unmittelbar:

$$R_0 = R'_0,$$

und die Formeln (18°) reduciren sich auf:

$$u = u' = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^h r^2 f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a}, r\right) \Psi_m dr + \int_h^{h+h'} r^2 f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a}, r\right) \Psi'_m dr}{\int_0^h \left[r f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a}, r\right)\right]^2 dr + \int_h^{h+h'} \left[\left(r f\frac{\lambda_{mn}}{a}, r\right)\right]^2 dr} \cdot f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a}\right) \cdot e^{-\lambda_{mn}^2 t}$$

Nehmen wir nun noch an, es sei $F_0(r, \Theta, \varphi) = f_0(r, \Theta, \varphi)$, so geht Ψ'_m über in Ψ_m, und die vorstehende Gleichung vereinfacht sich folgendermassen:

$$u = u' = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n}^{\infty} \frac{\int_0^{h'} r^2 f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a}, r\right) \Psi_m \, dr}{\int_0^{h'} \left[r f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a}, r\right)\right]^2 dr} \cdot f\left(\frac{\lambda_{mn}}{a}, r\right) e^{-\lambda_{mn}^2 t}$$

Diese Gleichung repräsentiert das physikalische Gesetz für die Wärmebewegung in einer homogenen Kugel unter der Voraussetzung, dass die Temperatur eine Function von vier Variabeln ist: von den drei Coordinaten und von der Zeit. —

Lebenslauf.

Ich, Sohn des Lehrers Fenkner in Goslar a. H., wurde ebendaselbst am 27. Januar 1856 geboren. Am 22. Februar 1875 bestand ich auf der Realschule I. Ordnung zu Goslar das Abiturientenexamen. Ostern desselben Jahres bezog ich die Universität Göttingen, um mich dem Studium der Mathematik und der Naturwissenschaften zu widmen. Von Ostern 1877 bis Mitte August 1879 setzte ich meine Studien in Marburg fort.